Uma Generalização dos Critérios de Conectividade #C(v) e MCC(v)

Jonatan Schroeder[1], **Jaime Cohen**[2], **Elias Procópio Duarte Jr.**[1]

[1]Departamento de Informática – Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Caixa Postal 19018 CEP 81531-990 – Curitiba - PR - Brasil

[2]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)
R. C. Cavalcanti, 4748 – CEP 84031-900 – Ponta Grossa - PR - Brasil

{jonatan,elias}@inf.ufpr.br, jaime@uol.com.br

Abstract. *The criteria $\#C(v)$ e $MCC(v)$ allow evaluation of node connectivity on computer networks. These criteria evaluate the connectivity based only on a neighborhood of at least two nodes. This work presents a generalization of these criteria, for which the minimum neighborhood size is variable. A reverse criterion that finds a neighborhood that satisfies a desired connectivity is also presented.*

Resumo. *Os critérios $\#C(v)$ e $MCC(v)$ foram apresentados como opções para avaliação da conectividade de nós em redes de computadores. Esses critérios avaliam a conectividade baseados em uma vizinhança de no mínimo dois nós. Este trabalho apresenta uma generalização para esses critérios, na qual a vizinhança é de no mínimo i nós, com i variável. Também é apresentado um critério reverso que avalia a vizinhança a partir de uma conectividade desejada.*

1. Introdução

A topologia das redes de computadores está sujeita a alterações freqüentes, decorrentes de inclusões e remoções de nós e enlaces, bem como de falhas e recuperações de falhas nesses nós e enlaces. Essas alterações podem gerar falhas nos protocolos de roteamento, e por conseqüência podem ocorrer perdas de pacotes e conexões na rede [1].

Uma abordagem proposta em trabalhos anteriores para evitar a perda de pacotes por alterações na topologia busca escolher nós altamente conexos na rede, de forma que, em caso de ocorrência de falha no caminho escolhido para roteamento, um novo caminho, ou desvio, é escolhido, permitindo a continuidade da comunicação entre os nós da rede.

Os critérios de conectividade $\#C(v)$ e $MCC(v)$, denominados respectivamente número de conectividade e componente de conectividade máxima, foram propostos em [2] como uma forma de avaliar a conectividade de nós em redes de computadores. A avaliação é baseada no cálculo do corte mínimo (ou fluxo máximo) entre o nó avaliado e um de seus vizinhos.

Este trabalho propõe uma generalização dos critérios $\#C(v)$ e $MCC(v)$, através do uso de uma vizinhança maior para a avaliação do corte mínimo. Esta generalização permite que o roteamento nas redes de computadores avalie a conectividade de um nó na região ao qual ele faz parte.

O restante deste trabalho está organizado como segue. A seção 2 contextualiza o trabalho, descrevendo os critérios na forma já apresentada em trabalhos anteriores. A

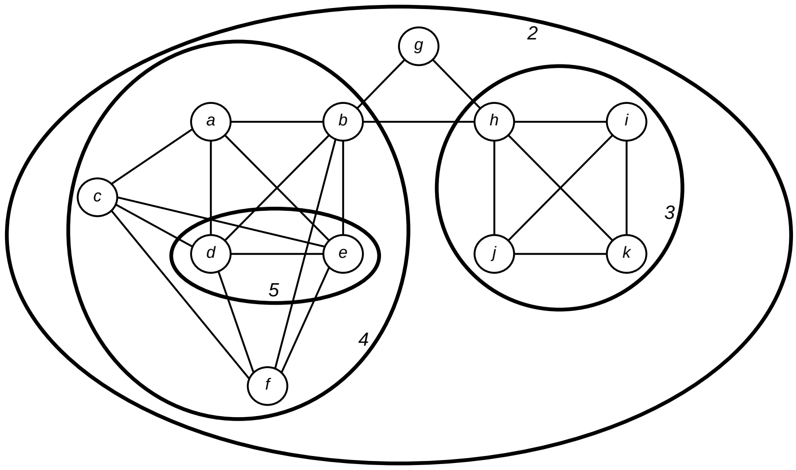

Figura 1. Um exemplo de cálculo dos critérios de conectividade

seção 3 descreve a generalização proposta neste trabalho. Finalmente, a seção 4 apresenta as conclusões.

2. Os Critérios de Conectividade

Os critérios de conectividade $\#C(v)$ e $MCC(v)$ foram inicialmente propostos em [2] como uma forma de avaliar a conectividade de nós em redes de computadores. A definição destes critérios é apresentada a seguir. Para o cálculo dos critérios, a topologia da rede sem a presença de falhas é modelada utilizando um grafo não direcionado. Um grafo não direcionado é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de elementos chamados nós ou vértices, e E é um conjunto finito de elementos chamados arestas. Cada aresta é um conjunto $\{u, v\}$, com $u, v \in V$.

Definição 2.1($\#C(v)$): Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $v \in V$ um vértice deste grafo. Seja V' o maior subconjunto não trivial (com pelo menos dois vértices) de V, contendo v, tal que o menor corte mínimo entre qualquer par de nós de V' em G é máximo. O número de conectividade $\#C(v)$ é definido como o menor corte mínimo entre v e qualquer outro nó de V'.

Definição 2.2($MCC(v)$): Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $v \in V$ um vértice deste grafo. O componente de conectividade máxima $MCC(v)$ é definido como o maior subconjunto V' de V tal que o corte mínimo entre qualquer par de nós de V' é superior ou igual a $\#C(v)$.

A figura 1 ilustra um grafo juntamente com os valores dos critérios de conectividade dos nodos. O número de conectividade de cada nodo corresponde ao número associado ao círculo mais restrito que envolve o mesmo. Os círculos representam o $MCC(v)$ dos nodos do grafo, juntamente com o número de conectividade associado. Por exemplo, considere o vértice a. O corte mínimo entre este vértice e o vértice b é 4, visto que é necessário remover 4 arestas para que ambos fiquem desconexos entre si. Desta forma, $\#C(a) = 4$, pois todos os pares de nodos em $\{a, b, c, f\}$ possuem corte mínimo com cardinalidade igual a 4. Pode-se verificar que o corte mínimo entre qualquer par de nodos do conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$ é igual ou maior a 4, e que não há nenhum outro nodo que possua esta propriedade. Logo, $MCC(a) = \{a, b, c, d, e, f\}$.

O cálculo dos critérios de conectividade é realizado utilizando uma estrutura auxiliar, denominada árvore de corte, ou árvore de Gomory-Hu [3]. A árvore de corte é uma árvore (grafo sem ciclos) com arestas valoradas e com os mesmos nós do grafo original, na qual o corte entre dois nós no grafo original é igual à aresta de menor valor no caminho único entre os nós na árvore de corte.

Em uma árvore de corte, o $\#C(v)$ é igual ao maior valor entre as arestas adjacente ao nó v na árvore de corte. O $MCC(v)$ é obtido através de uma busca na árvore de corte, percorrendo apenas arestas com valor igual ou superior ao valor do $\#C(v)$ [2].

3. Generalização dos Critérios de Conectividade

A definição de $\#C(v)$ avalia a conectividade de um nó utilizando uma vizinhança que pode ser de apenas dois nós (o próprio nó e mais um vizinho). Isso é verificado no tamanho do subgrafo V', utilizado na definição do $\#C(v)$. Neste trabalho é proposta uma generalização deste critério, e por conseqüência do critério $MCC(v)$, de forma a possibilitar o cálculo em uma vizinhança maior. A generalização é descrita a seguir. Nas definições, i representa a vizinhança que será utilizada para avaliação dos nós.

Definição 3.1($\#C_i(v)$): Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $v \in V$ um vértice deste grafo. Seja V' o maior subconjunto com i vértices de V, $v \in V'$, tal que o menor corte mínimo entre qualquer par de nós de V' em G é máximo. O número de conectividade $\#C_i(v)$, $2 \leq i \leq |V|$, é definido como o menor corte mínimo entre v e qualquer outro nó de V'.

Definição 3.2($MCC_i(v)$): Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $v \in V$ um vértice deste grafo. O componente de conectividade máxima $MCC_i(v)$, $2 \leq i \leq |V|$, é definido como o maior subconjunto V' de V tal que o corte mínimo entre qualquer par de nós de V' é superior ou igual a $\#C_i(v)$.

Pode-se observar os critérios mencionados na figura 1. Nesta figura, considere o nó d. Para uma vizinhança de 2 nós, o conjunto $\{d, e\}$ possui corte mínimo igual a 5 para o único par de nós do conjunto. Desta forma, $\#C_2(d) = 5$. Para uma vizinhança de 3 nós, um dos conjuntos com maior corte mínimo é $\{a, c, e\}$, em que cada par de nós possui corte mínimo igual ou superior a 4. Portanto, $\#C_3(d) = 4$. Analogamente chega-se que $MCC_2(d) = \{d, e\}$ e $MCC_3(d) = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Para obtenção do $\#C_i(v)$ pode ser utilizado o algoritmo descrito a seguir. O algoritmo recebe como entrada um grafo $G = (V, E)$, um nó $v \in V$ e um tamanho de vizinhança i, $2 \leq i \leq |V|$.

1. Seja C um conjunto de nós contendo apenas o nó v, e seja n igual a $+\infty$. Seja $T = (V, E_T)$ a árvore de corte do grafo G.
2. Se $|C| \geq i$ então o algoritmo termina. $\#C_i(v)$ é igual a n.
3. Seja e a aresta da árvore de corte que liga um nó em C a um nó em $(V - C)$ com maior valor associado. Se o valor associado a e for inferior a n, então n passa a valer o valor associado a e.
4. O nó adjacente a e que não pertence a C é incluído em C. Volta ao passo 2.

O algoritmo para o cálculo do $MCC_i(v)$ é o mesmo descrito em [2] para o cálculo do $MCC(v)$, porém é utilizado o número de conectividade genérico ($\#C_i(v)$) em lugar do específico ($\#C(v)$).

A abordagem descrita acima permite que, a partir de uma vizinhança definida, encontre-se a conectividade de um nó nessa vizinhança. Outra abordagem possível é a de encontrar a vizinhança máxima para uma conectividade definida. Este critério pode ser utilizado para casos em que a conectividade do nó é suficientemente alta, e deseja-se avaliar até que ponto uma conectividade definida é alcançada por um nó. Desta forma, é definido um novo critério reverso denominado $LCC_n(v)$, ou componente de conectividade limitada (*Limited Connectivity Component*) de um nó v.

Definição 3.3($LCC_n(v)$): Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja $v \in V$ um vértice deste grafo. O componente de conectividade limitada $LCC_n(v)$ é definido como o maior subconjunto de V tal que o corte mínimo entre qualquer par de nós é superior ou igual a n.

Como um exemplo da aplicação deste critério, considere o nó d ilustrado na figura 1. Se a conectividade desejada é igual a 5, apenas o nó e possui corte mínimo igual ou superior a 5. Logo, $LCC_5(d) = \{d, e\}$. Para conectividade igual a 4, são alcançados também os nós a, b, c e f, logo $LCC_4(d) = \{a, b, c, d, e, f\}$. Observe que não há nós na rede para os quais o corte mínimo com o nó d seja superior a 5, logo para qualquer valor n superior a 5, $LCC_n(d) = \{d\}$.

Para o cálculo do $LCC_n(v)$ pode ser utilizado o algoritmo a seguir. O algoritmo recebe como entrada um grafo $G = (V, E)$, um nó $v \in V$ e uma conectividade definida n, $n \geq 1$.

1. Seja C um conjunto de nós contendo apenas o nó v. Seja $T = (V, E_T)$ a árvore de corte do grafo G.
2. Seja e uma aresta da árvore de corte qualquer que liga um nó em C a um nó em $(V - C)$ e que possui valor associado superior a n. Se esta aresta não existir, então o algoritmo termina, com $LCC_n(v)$ igual a C.
3. O nó adjacente a e que não pertence a C é incluído em C. Volta ao passo 2.

Como um paralelo entre os critérios, assume-se pelas definições que $\forall v, \#C(v) = \#C_2(v)$ e $MCC(v) = MCC_2(v)$. Também é assumido que $MCC_i(v) = LCC_{\#C_i(v)}(v)$.

4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos a generalização de dois critérios de conectividade utilizados em algoritmos de roteamento em redes de computadores. Também apresentamos um novo critério reverso que encontra a vizinhança de um nó que possui um valor de conectividade definido. Trabalhos futuros incluem a aplicação dos critérios genéricos em um algoritmo prático de roteamento em redes de computadores.

Referências

[1] C. Huitema. *Routing in the Internet*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2^{nd} edition, 1999.

[2] E. P. Duarte Jr., R. Santini, and J. Cohen. Delivering packets during the routing convergence latency interval through highly connected detours. In *Proceedings of the IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN'2004)*, pages 495–504, Florence, Italy, 2004.

[3] R. E. Gomory and T. C. Hu. Multi-terminal network flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 9:551–556, 1961.